Mathématique et Mécanique de Base

Pauline GERUS - Leila LEFEVBRE - Violaine SEVREZ

Licence 1 STAPS
BMC 51

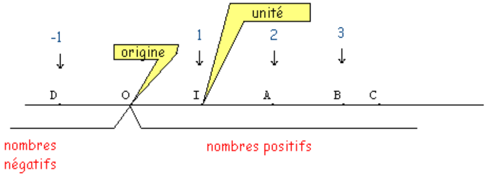
2009-2010

FACULTE DES SCIENCES DU SPORT
UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE AIX-MARSEILLE II

- Repère = zone de référence
- Etablit en fonction des objectifs
  - On choisit une origine (O), qui sert de référence
  - puis on choisit les axes : $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ (base du plan) ou $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ (base de l'espace)
- Repères particuliers :
  - Repère orthogonal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$: 2 axes perpendiculaires de même origine
  - Repère normé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$: $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 1$
  - Repère orthonormé : orthogonal et normé

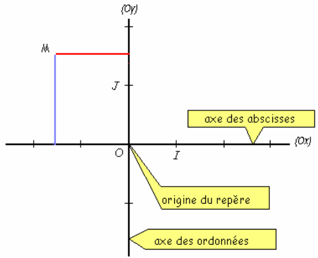
Comment situer un point ?

- Sur une droite : graduer la droite

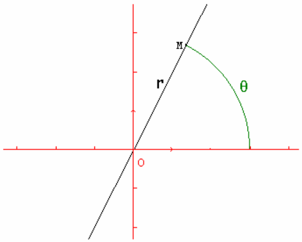


- Dans un plan : plusieurs possibilités

Repère Cartésien

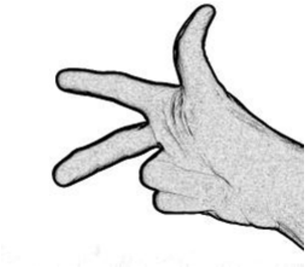


Repère polaire



On parle de repère direct ou indirect par rapport au sens des vecteurs dans le plan.

- En 2D, on utilise le sens trigonométrique (ou sens inverse des aiguilles d'une montre)
- En 3D, on utilise la règle de la main droite pour définir le sens direct



pouce $= X$; index $= Y$; majeur $= Z$

- **Point** : écriture en ligne $A(x, y, z)$
- **Scalaire** : Une valeur réelle et une unité de mesure
- **Vecteur** : représentation mathématique de différentes variables
  - caractérisé par trois propriétés :
    - son intensité (ou norme, ou module, ou grandeur),
    - sa direction,
    - son sens
  - $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{AB}$

- le **vecteur nul** : $\overrightarrow{0}$
- le **vecteur unitaire** : vecteur de longueur 1
- les **vecteurs colinéaires** : l'un est le produit de l'autre par un réel. Ils ont même direction
- les **vecteurs orthogonaux** : leurs lignes d'action sont perpendiculaires

Représentation d'un vecteur

- Notation par colonne :

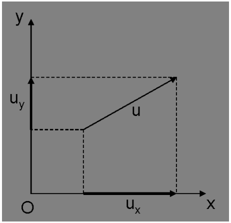
$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix}$$

- Notation dans la base :

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}$$

$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont des vecteurs unitaires

$$\overrightarrow{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Dans le plan, un vecteur a :

- une composante sur l'axe des abscisse : $x_B - x_A$
- une composante sur l'axe des ordonnées : $y_B - y_A$

AB a pour coordonnées (composantes) :

$$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$$

- Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: distance entre A et B ($\| \overrightarrow{AB} \|$)

Norme

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- Le milieu M d'un segment AB a pour coordonnées :

Coordonnées du milieu d'un segment :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ par un scalaire r est un vecteur tel que :

$$\text{Si } \overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix}, \quad r \cdot \overrightarrow{a} = r \cdot \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot a1 \\ r \cdot a2 \\ r \cdot a3 \end{bmatrix}$$

- Direction : celle de $\overrightarrow{a}$
- Sens : celui de $\overrightarrow{a}$ si $r > 0$, celui de $-\overrightarrow{a}$ si $r < 0$
- Norme : égale au produit de la norme de $\overrightarrow{a}$ par la valeur absolue de r :

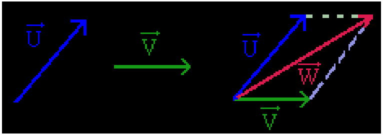
$$\| r \cdot \overrightarrow{AB} \| = | r | \| \overrightarrow{AB} \|$$

Le produit d'un vecteur par un scalaire possède les propriétés suivantes :

- Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs : $\alpha(\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V})=\alpha\overrightarrow{U}+\alpha\overrightarrow{V}$
- Distributivité par rapport à l'addition des scalaires : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{U}=\alpha\overrightarrow{U}+\beta\overrightarrow{U}$
- Associativité : $\alpha(\beta\overrightarrow{U})=(\alpha\beta)\overrightarrow{U}$
- Elément neutre : $1\overrightarrow{U}=\overrightarrow{U}$

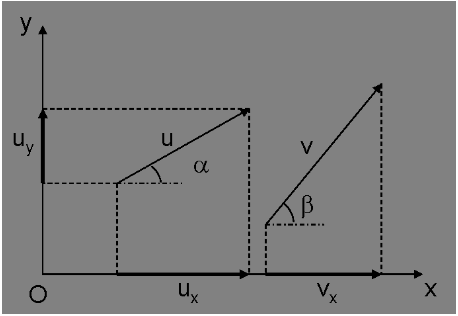
Addition vectorielle

La somme de 2 ou plusieurs vecteurs est un vecteur obtenu par la **"règle du parallélogramme"**



Si $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{bmatrix}$ alors $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} a1 + b1 \\ a2 + b2 \\ a3 + b3 \end{bmatrix}$

Exemple



$\alpha = 60^\circ$
$\beta = 20^\circ$
$\| \overrightarrow{U} \| = 50N$
$\| \overrightarrow{V} \| = 60N$
$\| \overrightarrow{W} \| = ?$

corrigé

- On projette $\| \overrightarrow{U} \|$ et $\| \overrightarrow{V} \|$ sur x : $U_x + V_x = W_x$
  $U_x = \cos\alpha * \| \overrightarrow{U} \| = \cos 60 * 50 = 25N$
  $V_x = \cos\beta * \| \overrightarrow{V} \| = \cos 20 * 60 = 56N$
  $W_x = U_x + V_x = 25 + 56 = 81N$
- On projette $\| \overrightarrow{U} \|$ et $\| \overrightarrow{V} \|$ sur y : $U_y + V_y = W_y$
  $U_y = \sin\alpha * \| \overrightarrow{U} \| = \sin 60 * 50 = 43N$
  $V_y = \sin\beta * \| \overrightarrow{V} \| = \sin 20 * 60 = 20N$
  $W_y = U_y + V_y = 43 + 20 = 63N$
- Calcul de la norme à partir du thèoréme de Pytagore :

$$\| \overrightarrow{W} \| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{81^2 + 63^2} = 102N$$

propriétés

L'addition vectorielle possède les propriétés suivantes :

- Associativité : $(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + (\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W})$
- Commutativité : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$
- Elément neutre : $\overrightarrow{U} + 0 = 0 + \overrightarrow{U} = \overrightarrow{U}$
- Elément symétrique : $\overrightarrow{U} + (-\overrightarrow{U}) = 0$

Soustraction vectorielle

Même régle géométrique en utilisant le vecteur $-\overrightarrow{V}$

Donc, si $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{bmatrix}$ alors :

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} a1 - b1 \\ a2 - b2 \\ a3 - b3 \end{bmatrix}$$

Produit scalaire

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, noté $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$, est un scalaire tel que :

Produit scalaire

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \| \overrightarrow{U} \| \| \overrightarrow{V} \| \cos(\theta)$$

- Le produit scalaire est donc positif pour tout θ aigu, et négatif pour tout θ obtus
- En posant U_x , U_y , U_z et V_x , V_y , V_z les composantes respectives de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ dans la base $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

Forme analytique

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z$$

Propriétés sur le produit scalaire

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ on a :

- $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{U}$
- $\overrightarrow{U} \cdot (\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}) = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W}$
- $\overrightarrow{U} \cdot (a\overrightarrow{V}) = a(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}) = (a\overrightarrow{U}) \cdot \overrightarrow{V}$
- $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{U} \perp \overrightarrow{V}$
- $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{0} = 0$
- $\overrightarrow{U}^2 = \| \overrightarrow{U} \|^2$
- $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \| \overrightarrow{U} \| \| \overrightarrow{V} \| \cos(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}})$
- $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{2}(\| \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \|^2 - \| \overrightarrow{U} \|^2 - \| \overrightarrow{V} \|^2)$

Produit scalaire de 2 vecteurs colinéaires

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ colinéaires et de même sens est le produit des normes de $\overrightarrow{U}$ et de $\overrightarrow{V}$
- Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ colinéaires et de sens contraire est l'opposé du produit des normes de $\overrightarrow{U}$ et de $\overrightarrow{V}$
- Exemple : A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre tels que : $AB = 2$ et $BC = 3$:
  - $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 10$
  - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -6$
  - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$
  - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 6$

Produit vectoriel de 2 vecteurs

- Le produit vectoriel est uniquement défini dans l'espace de dimension supérieure ou égale à 3.
- Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est un vecteur noté $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$
  - Direction : $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V}$
  - Sens : trièdre $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$ direct

Norme :

$$\| \overrightarrow{W} \| = \| \overrightarrow{U} \| \| \overrightarrow{V} \| \sin(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}})$$

propriétés

- Si $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = 0$
- Si $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = 0$
- Le produit vectoriel n'est pas commutatif :
  $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}$
- On peut calculer l'angle entre 2 vecteurs à partir du produit vectoriel

forme analytique

En posant U_x , U_y , U_z et V_x , V_y , V_z les composantes respectives de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ dans la base $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,

Produit vectoriel

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = (U_yV_z - U_zV_y) + (U_zV_x - U_xV_z) + (U_xV_y - U_yV_x)$$

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} \quad \begin{matrix} U_yV_z - U_zV_y \\ U_zV_x - U_xV_z \\ U_xV_y - U_yV_x \end{matrix}$$

Enoncé

Dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on considère les points : $A(-2, 1)$, $B(-1, 3)$ et $C(5, 0)$

1. Tracer un repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et y placer les points A, B et C
2. Calculer la norme du vecteur AB
3. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B
4. Calculer les coordonnées du point M, milieu de [AC]
5. On appelle D le point tel que le quadrilatère ABCD est un rectangle. Placer D dans le repère, puis calculer ses coordonnées

Corrigé

1. Tracé du repère
2. Calcule de la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$
   $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$
   $\sqrt{(-1-(-2))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$
3. Si le triangle ABC est rectangle en B, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont perpendiculaires.
   On a alors : $\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} (x_B - x_A) \\ (y_B - y_A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ et
   $\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} (x_C - x_B) \\ (y_C - y_B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ -3 \end{vmatrix}$
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = x_{AB}x_{BC} + Y_{AB}Y_{BC} = (1 * 6) + (2 * (-3)) = 0$
   On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont perpendiculaires. Le trinagle ABC est donc rectangle en B

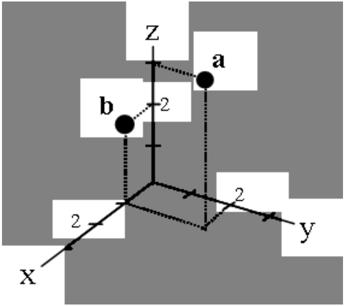
Corrigé (suite)

1. Calcul des coordonnées du point M, milieu de [AC]
$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-2+5)}{2} \\ \dfrac{(1+0)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$
2. M est aussi le milieu de $\left[BD\right]$

   On a alors : $M = \begin{bmatrix} \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{bmatrix}$ Donc : $\dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{3}{2}$ et
   $\dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{1}{2}$

   Or : $x_B = -1$ et $y_B = 3$

   Donc : $x_D = 4$ et $y_D = -2$



1. Donner les coordonnées des points a et b
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ab}$
3. Calculer la distance d entre les points a et b
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ob}$
5. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{oa} \cdot \overrightarrow{ob}$
6. Déterminer l'angle θ entre les vecteurs $\overrightarrow{oa}$ et $\overrightarrow{ob}$

Corrigé

1. $a(2,3)$ et $b(-3,2)$
2. $\overrightarrow{ab}\left|\begin{array}{l} x_b - x_a = -3 - 2 = -5 \\ y_b - y_a = 2 - 3 = -1 \end{array}\right.$
3. $\| \overrightarrow{ab} \| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$
4. $\overrightarrow{oa}\left|\begin{array}{l} x_a - x_o = 2 - 0 = 2 \\ y_o - y_a = 3 - 0 = 3 \end{array}\right.$ et $\overrightarrow{ob}\left|\begin{array}{l} x_b - x_o = -3 - 0 = -3 \\ y_b - y_a = 2 - 0 = 2 \end{array}\right.$
5. $\overrightarrow{oa} \cdot \overrightarrow{ob} = x_{oa}x_{ob} + y_{oa}y_{ob} = 2 * (-3) + 3 * 2 = 0$
6. $\overrightarrow{oa} \cdot \overrightarrow{ob} = 0$ donc $\overrightarrow{oa} \perp \overrightarrow{ob}$

Dans chaque cas, utiliser la forme la plus adaptée pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

1. Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A, les angles à la base ont pour mesure 75° et $AB = AC = 3$
2. Le triangle ABC est tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$
3. Le trinagle ABC est isocèle de somment principal B ; I est le milieu de $\left[AC\right]$; on a $AC = 6$ et $BI = 5$

Corrigé

1. $\widehat{BAC} = 180 - (75 * 2) = 30$
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \| \overrightarrow{AB} \| * \| \overrightarrow{AC} \| * \cos \widehat{BAC} = 3 * 3 * \cos 30 \approx 7.8$
2. $3^2 + 4^2 = 5^2$ donc $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2$
   Le triangle ABC est alors rectangle en A et on a
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
3. Puisque I est le milieu de $[AC]$ et que $AC = 6$ on a $CI = 3$
   Le triangle IBC est rectangle en I donc d'après le théorème de Pythagore $[BC]^2 = [BI]^2 + [IC]^2$ donc
   $[AC]^2 = 5^2 + 3^2$ donc $BC = 6$
   Le triangle ABC est donc équilatéral et on a alors :
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \| \overrightarrow{AB} \| * \| \overrightarrow{AC} \| * \cos \widehat{BAC} = 6 * 6 * \cos 60 =$
   $6 * 6 * 0.5 = 18$